# UNA NOTA SOBRE LAS TOPOLOGIAS $\tau_0$ Y $\tau_\omega$ EN H(U)

J.M. Ansemil* y S. Ponte*

Resumen.- Sean, U un abierto equilibrado de un espacio localmente convexo complejo E, H(U) el espacio vectorial de las funciones holomorfas en U y $\tau_0$ y $\tau_\omega$ las topologías compacto-abierta y portada de Nachbin respectivamente en H(U).

Se prueba en esta nota que si E es de Fréchet-Montel, entonces $\tau_0 = \tau_\omega$ en H(U) si y sólo si $\tau_0$ y $\tau_\omega$ coinciden en todos los espacios de polinomios homogéneos continuos en E. Además se relaciona el problema de conocer si $\tau_0 = \tau_\omega$ en esos espacios con un clásico problema de Grothendieck relativo al $\varepsilon$-producto de dos espacios de tipo DFM.

46G20. Holomorfía en dimensión infinita.

Notaciones.- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $P(^nE)$ representará el espacio vectorial de los polinomios n-homogeneos continuos de E en el cuerpo complejo $\mathbb{C}$. H(U) y H(K) representarán respectivamente los espacios vectoriales de funciones holomorfas en U y de gérmenes holomorfos en K, siendo U un abierto y K un compacto de E.

La topología compacto-abierta en $P(^nE)$ y H(U) se denotará por $\tau_0$. También se denotará por $\tau_0$ a la topología localmente convexa en H(K) definida por $(H(K), \tau_0) = \varinjlim_{V \supset K} (H(V), \tau_0)$ cuando V recorre la familia de los abiertos que contienen a K.

La topología portada de Nachbin $\tau_\omega$ en $P(^nE)$ y H(U) está definida por la familia de seminormas en $P(^nE)$ y H(U) portadas por los compactos de E y U respectivamente (véase |2|). La topología $\tau_\omega$ en H(K) se define por $(H(K), \tau_\omega) = \varinjlim_{V \supset K} (H(V), \tau_\omega)$ cuando V recorre la familia de los abiertos que contienen a K.

Claramente $\tau_0 \leq \tau_\omega$ en cualquiera de los espacios $P(^nE)$, H(U) y H(K). Además es conocido que $(P(^nE), \tau_0)$ es un subespacio complementado de $(H(U), \tau_0)$ y de $(H(K), \tau_0)$, y que también se verifica lo análogo para la topología $\tau_\omega$ (|2|).

===========

-----------

* Subvencionados por la C.A.C.Y.T. Proyecto 2197/83.

El siguiente Lema se obtiene del Lema 3. 28 y del Corolario 2. 44 de |2|.

1. Lema.- Si V es un abierto equilibrado de un espacio localmente convexo complejo metrizable E y $(f_\alpha)$ es una red $\tau_o$-acotada convergente a 0 en $(H(V), \tau_o)$ entonces, si $\tau_o = \tau_\omega$ en $P(^nE)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $(f_\alpha)$ también converge a 0 en $(H(V), \tau_\omega)$.

2. Teorema.- Sean, E un espacio de Fréchet-Montel, U un abierto equilibrado de E y K un compacto equilibrado de E. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes: (a) $\tau_o = \tau_\omega$ en $H(U)$; (b) $\tau_o = \tau_\omega$ en $P(^nE)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y (c) $\tau_o = \tau_\omega$ en $H(K)$.

Demostración.- (a)$\Rightarrow$(b) se sigue del hecho de que para todo $n \in \mathbb{N}$ $(P(^nE), \tau_o)$ es un subespacio complementado de $(H(U), \tau_o)$ y $(P(^nE), \tau_\omega)$ lo es de $(H(U), \tau_\omega)$.

(b)$\Rightarrow$(c). Sea $(V_j)$ una sucesión fundamental decreciente de entornos de 0 en E convexos y equilibrados. Para cada $j \in \mathbb{N}$ hagamos $\chi_j = \{f \in H(K+V_j): \sup_{z \in K+V_j} |f(z)| \leq j\}$. $\chi_j$ es un conjunto convexo y equilibrado, además es también un compacto de $(H(K+V_j), \tau_o)$ (teorema de Montel, |2|, p. 130). Como por (b) $\tau_o = \tau_\omega$ en $P(^nE)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, el Lema 1 nos da que las topologías $\tau_o$ y $\tau_\omega$ coinciden en $\chi_j$, pues $\chi_j$ es convexo y equilibrado y por ese Lema $\tau_o$ y $\tau_\omega$ tienen las mismas redes convergentes a 0 (véase |3|, p. 105). En consecuencia $\chi_j$ es un compacto de $(H(K+V_j), \tau_\omega)$ y entonces de $(H(K), \tau_\omega) = \varinjlim_j (H(K+V_j), \tau_\omega)$. Ahora bien, como $\chi_j$ es un compacto de $(H(K), \tau_o)$ (por serlo de $(H(K+V_j), \tau_o)$) y de $(H(K), \tau_\omega)$ y $\tau_o(H(K))|_{\chi_j} \leq \tau_\omega(H(K))|_{\chi_j}$ resulta que $\tau_o(H(K))|_{\chi_j} = \tau_\omega(H(K))|_{\chi_j}$.

Sea ahora G un abierto de $(H(K), \tau_\omega)$. Entonces $G \cap \chi_j$ es un abierto de $(\chi_j, \tau_\omega(H(K))|_{\chi_j})$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y como $\tau_\omega(H(K))|_{\chi_j} = \tau_o(H(K))|_{\chi_j}$ resulta que $G \cap \chi_j$ es abierto de $(\chi_j, \tau_o(H(K))|_{\chi_j})$. En consecuencia G es abierto de $(H(K), \tau_o)$ (véase |9|, teor.2.1).

(c)$\Rightarrow$(a). Como U es equilibrado se verifica que $(H(U), \tau_o) = \varprojlim_L (H(L), \tau_o)$ y $(H(U), \tau_\omega) = \varprojlim_L (H(L), \tau_\omega)$ cuando L recorre la familia de los compactos equilibrados de U (véase |9|). Del hecho de que $(P(^nE), \tau)$ es complementado de $(H(K), \tau)$ con $\tau = \tau_o$ ó $\tau_\omega$

se sigue que al ser $\tau_o = \tau_\omega$ en $H(K)$ también $\tau_o = \tau_\omega$ en $P(^nE)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y asi, de (b)$\Longrightarrow$(c) se sigue que $\tau_o = \tau_\omega$ en $H(L)$ para todo compacto equilibrado L de U. La verificación de (a) se sigue entonces directamente de las igualdades anteriores.

La siguiente Proposición da algunas condiciones equivalentes a la condición (b) del Teorema, esto es, a que $\tau_o = \tau_\omega$ en $P(^nE)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. <u>Proposición.-</u> Sean, E un espacio de Fréchet-Montel y $n \in \mathbb{N}$. Equivalen: (a) $\tau_o = \tau_\omega$ en $P(^nE)$; (b) $(P(^nE), \beta)$ es tonelado, y (c) $(P(^nE), \beta)$ es DFM. ($\beta$ denota la topología de la convergencia uniforme en los acotados de E).

<u>Demostración.-</u> Observamos en primer lugar, que al ser E de Montel, $\tau_o = \beta$ en $P(^nE)$.

(a)$\Longleftrightarrow$(b). Al ser E metrizable, $\tau_\omega$ es la topología tonelada asociada a $\tau_o$ en $P(^nE)$ (|2|, p. 132), luego $(P(^nE), \beta)$ es tonelado si y sólo si $\tau_o = \tau_\omega$ en $P(^nE)$.

(b)$\Longrightarrow$(c). Al ser E metrizable, $(P(^nE), \beta)$ es semi-Montel (|2|, p. 130) y tiene una sucesión fundamental de acotados: Si $(V_j)$ es una sucesión fundamental de entornos de O en E, entonces la sucesión $(V_j^{(n)})_{j=1}^{\infty}$, con $V_j^{(n)} = \{P \in P(^nE): \sup_{z \in V_j} |P(z)| \leq 1\}$ está formada por conjuntos acotados de $(P(^nE), \beta)$ y todo acotado de $(P(^nE), \beta)$ está contenido en alguno de los $V_j^{(n)}$. Esto último es consecuencia del hecho de que los acotados de $(P(^nE), \beta)$ son localmente acotados (|2|, p. 25). Luego (c) se sigue de (b).

(c)$\Rightarrow$(b). Es consecuencia del hecho de que todo espacio de Montel es tonelado.

Sean E y F dos espacios localmente convexos, siendo E de Fréchet-Montel. Por cada $n \in \mathbb{N}$ el espacio $L_b(^nE; F)$ de las aplicaciones n-lineales continuas de $E^n$ en F dotado de la topología b de la convergencia uniforme en los acotados de $E^n$, es isomorfo al espacio $L_b(E; L_b(^{n-1}E; F))$ de las aplicaciones lineales y continuas de E en $L_b(^{n-1}E; F)$ dotado de la correspondiente topología de la convergencia uniforme en los acotados de E.

Al ser E de Fréchet-Montel, su dual fuerte $E_b'$ es de tipo DFM. Por otra parte $L_b(^2E) \cong L_b(E; E_b')$ coincide con el $\varepsilon$-producto de

$E_b'$ por si mismo. En consecuencia $L_b(^2E)$ es DFM si y sólo si el $\varepsilon$-producto de $E_b'$ por si mismo lo es.

El conocer si el $\varepsilon$-producto de dos espacios de tipo DFM es un espacio de tipo DFM es un problema abierto de Grothendieck (véase |4| y |7|). Si este problema tuviese solución afirmativa entonces $L_b(^2E)$ sería DFM y como $L_b(^nE) \cong L_b(E; L_b(^{n-1}E))$ para n= 2, 3,..., se seguiría por inducción que $L_b(^nE)$ sería DFM, y por tanto tonelado, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(P(^nE), \beta)$ es un subespacio complementado de $L_b(^nE)$ y por tanto $(P(^nE), \beta)$ sería tonelado (|1|, Lema 1), y se seguiría entonces de la Proposición 3 y el Teorema 2 que $\tau_o$ y $\tau_\omega$ coincidirían en H(U) para todo abierto equilibrado U de un espacio de Fréchet-Montel.

El $\varepsilon$-producto de dos espacios de tipo DFS es también DFS (|4|) y, en particular, tonelado. Luego, si E es de Fréchet-Schwartz, $\tau_o = \tau_\omega$ en H(U) para todo abierto equilibrado U de E. Este resultado ya fue obtenido por J. Mujica en |9| con otras técnicas.

## REFERENCIAS


|1|.- ANSEMIL, J.M., PONTE, S., Topologies Associated with the Compact Open Topology on H(U). Proc. Royal Irish Ac. 82 A, 1 (1982), 121-128.

|2|.- DINEEN, S., Complex Analysis in Locally Convex Spaces. North Holland Math. Studies, 57, 1981.

|3|.- GROTHENDIECK, A., Sur les espaces (F) et (DF). Suma Brasilienses Mathematicae, 1954.

|4|.- GROTHENDIECK, A., Produits Tensoriels Topologiques et espaces Nucléaires. Mem. A. M. S., 16, 140 (1955).

|5|.- HOLLSTEIN, R., (DCF)-Räume und lokalconvexe Tensorprodukte. Arch. Math. vol XXIX (1977), 524-531.

|6|.- HORWATH, J., Topological Vector Spaces and Distributions. Addison Wesley Pub. Co., 1966.

|7|.- KOTHE, G., Topological Vector Spaces II, Springer Verlag, 1979.

|8|.- MEISE, R., A remark on the Ported and Compact-Open Topology for Spaces of Holomorphic Functions on Nuclear Fréchet Spaces. Proc. Royal Irish. Ac., 81 A, 2 (1981), 217-223.

|9|.- MUJICA, J., A Banach-Dieudonné Theorem for Germs of Holomorphic Functions. J. of Funct. Analysis, 57, 1 (1984), 31-48.

|10|.- NACHBIN., L., Topology on Spaces of Holomorphic Mappings. Erg. der Math. Springer-Verlag, 47, 1969.



Facultad de Matemáticas. Univ. Complutense

28040-MADRID. SPAIN.